6.2. *t*-Dağılımı veya *t*-Student Dağılımı

Bilindiği gibi *t*-dağılımı ilk defa 1908 yılında *Doublin'de Guinness* bira fabrikasında çalışan *william Sealy GOSSET* tarafından yayımlanan bir makale ile gündeme gelmiştir. O yıllarda çalıştığı firma makaleye kendi isminin doğrudan verilmesini kabul etmeyince, bu yayının yazarı *Student (öğrenci)* takma adı verilerek yayınlanmıştır. Daha sonraki yıllarda *t*-testleri ve onunla ilgili kuramsal temeller *R.A. Fisher* tarafından geliştirilmiş ve bu dağılım için de *Student*'in *t*-dağılımı adı kullanılmıştır. Böyle bir dağılım, uygulamalı istatistiksel çalışmalarda normal dağılımın yerine az sayıda elemanlı örnekleme sonuçlarına dayalı problemlerin irdelenmesinde kullanılmakla beraber ilk bakışta sanki "normal dağılımın bir özel halidir" gibi yanlış bir intiba vermektedir. Halbuki, bunun böyle olmadığı gibi, *Student*'in *t*-dağılımı teorik bakımdan incelendiğinde, genelleştirilmiş hiperbolik dağılımının özel bir hali olduğu açıkça görülebilir.

Ancak, burada özetle vurgulamak gerekirse, bu dağılım türü olasılık kuramı ve istatistik biliminde genel olarak deneme sayısı az ise ve evrensel küme normal dağılım gösterdiği varsayımının geçerli olduğu durumlarda deneysel küme ortalamalarını veya elemanlarının irdelenmesi gibi çeşitli hipotez testlerinin uygulanmasında oldukça fazla kullanılan sürekli bir olasılık dağılımıdır.

6.2.1. *t*-Dağılım Fonksiyonu

İstatistik işlemlerde sıkça kullanım alanı bulunan takma adıyla *Student Dağılımı* ya da diğer adıyla *t-dağılımı*; normal dağılım ve χ_f^2-dağılımının temel esaslarına göre tanımlanabilir. Bu amaçla, burada öncelikle $z \to N(0,1)$ ve $\mathrm{v} \to \chi^2(f)$ dağılımlarına sahip z ve v gibi iki rastgele değişken olsunlar. Bu iki z ve v rastgele değişkenleri aynı zamanda istatistik olarak bağımsız oldukları koşulunu da sağlamış olsunlar. Bu durumda; z ve v rastgele değişkenlerinin birleşik olasılık fonksiyonu; her iki değişkenin sonucu olarak;

$$f(z,\mathrm{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)2^{\frac{f}{2}}}\mathrm{v}^{\left(\frac{f}{2}-1\right)}\exp\left(-\frac{\mathrm{v}}{2}\right) \qquad \begin{Bmatrix} -\infty \langle z \langle \infty \\ 0 \langle \mathrm{v} \langle \infty \end{Bmatrix} \qquad \text{6-80}$$

$$\textit{Aksi halde} \qquad f(z,\mathrm{v}) = 0$$

olarak ifade edilebilir. Burada, üçüncü bir t değişkeni olarak;

$$t = \frac{z}{\left(\mathrm{v}/f\right)^{1/2}} \qquad \text{6-81}$$

şeklinde yeni bir rastgele değişken daha tanımlanmış olsun. Sonra, burada sözü edilen z ve v ilk rastgele değişkenlerine karşılık gelen (6-80) bileşik olasılık fonksiyonu t ve u gibi iki adet yeni rastgele değişkenine göre,

$$t = \frac{z}{(\mathrm{v}/f)^{1/2}} \quad , \quad u = \mathrm{v} \qquad \text{6-82}$$

ya da,

$$z = \frac{t\,u^{1/2}}{f^{1/2}} \quad , \quad \mathrm{v} = u \qquad \text{6-83}$$

şeklindeki değişken dönüşümleri yapılarak bu değişkenlere göre yeni bir bileşik olasılık fonksiyonu ifade edilebilir. Böyle bir dönüşümün *Jacobian* değeri;

$$|J| = \begin{bmatrix} (\frac{\partial z}{\partial t}) & (\frac{\partial z}{\partial u}) \\ (\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}) & (\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{u}{f})^{1/2} & \frac{t}{2}(uf)^{-1/2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (\frac{u}{f})^{1/2} \qquad \text{6-84}$$

ve yeni olasılık fonksiyonu da,

$$f(t,u) = f(z,\mathrm{v})|J| = f(\frac{t\ u^{1/2}}{f^{1/2}}\ ,\ u)|J| =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\Gamma(\frac{f}{2})\ 2^{f/2}}\ u^{(\frac{f}{2}-1)} \exp\left\{-\frac{u}{2}(1+\frac{t^2}{v})\right\}(\frac{u}{f})^{1/2} \qquad \text{6-85}$$

$$Burada; \quad \begin{Bmatrix} -\infty < t < +\infty \\ 0 < u < +\infty \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad Aksi \quad durumda \quad f(t,u) = 0$$

olarak verilebilir. Yukarıdaki (6-85) ifadede u parametresi integralin dışında tutulup sadece t ile ilgilenildiği sürece; t rastgele değişkenine karşılık gelen marjinal olasılık fonksiyonu;

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,u)\ du = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi\ f)^{1/2}\Gamma(\frac{f}{2})\ 2^{f/2}} u^{(\frac{f+1}{2}-1)} \exp\left\{-\frac{u}{2}(1+\frac{t^2}{f})\right\} du$$

6-86

olarak elde edilir. Bu integral işleminde;

$$z = \frac{u(1+\frac{t^2}{f})}{2} \qquad \text{6-87}$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapılarak sözü edilen olasılık fonksiyonu;

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi\ f)^{1/2}\Gamma(\frac{f}{2})\ 2^{f/2}}\ (\frac{2Z}{1+\frac{t^2}{f}})^{(\frac{f+1}{2}-1)}\ \exp(\frac{2}{1+\frac{t^2}{f}})\ dZ \qquad 6\text{-}88$$

veya daha basit bir gösterimle,

$$F(t)=\frac{\Gamma(\frac{f+1}{2})}{(\pi\ f)^{1/2}\Gamma(\frac{f}{2})}\ \frac{1}{(1+\frac{t^2}{f})^{\frac{f+1}{2}}} \quad ; \quad -\infty \langle\ t\ \langle\ +\infty \qquad 6\text{-}89a$$

olarak da ifade edilmiş olur. Sonuçta; burada, eğer

$$z \to N(0,1) \qquad ve \qquad \mathrm{v} \to \chi^2(f)$$

olmak üzere; $t(f)$ ‘nin özel formundaki bir ifadesi;

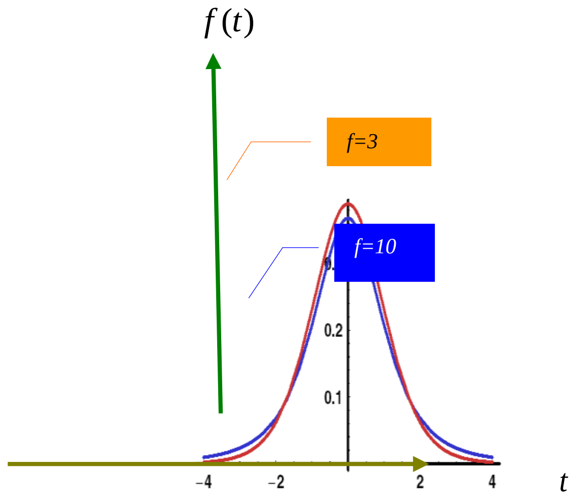
$$t=\frac{z}{(\mathrm{v}/f)^{1/2}} \qquad 6\text{-}89b$$

olarak yazılırsa, bu şekilde tanımlanmış olan t rastgele değişkeni yukarıda sözü edilen t –dağılımına sahip bir rastgele değişken olmaktadır.

6.2.2. *t*-Dağılım Eğrisi

Yukarıda verilmiş olan (6-88) *t*-dağılımının olaslık fonksiyonu; normal dağılım ve χ^2 *-dağılım* eğrilerinin özelliklerini de göstermiş olduğundan oldukça karmaşık bir yapıya sahip olmaktadır. Böyle bir eğri, *f* serbestlik derecesine bağlı bir fonksiyonla ifade edilmiş olduğundan *f* serbestlik derecesi değiştikçe, bu değişime paralel olarak da farklı geometrik görünüme sahip grafikler sergilerler. Böyle bir durum en basit şekliyle, Şekil 19‘dan da görülebileceği gibi *f=3* ve *f=10* serbestlik derecelerine göre çizilmiş iki farklı *t*-dağılım eğrisi örneği ile sergilenebilir.

Bu durumun farklı değerli serbestlik dereceleri için genelleştirilirse, Şekil 19’dan da görüleceği gibi; *f* serbestlik derecesi büyüdükçe *t*-dağılım eğrisi normal dağılım eğrisine oldukça yaklaşarak benzer bir özellik sergilemektedir. Yani; normal dağılıma yaklaşmakta veya bir diğer ifade ile $f=\infty$ için normal dağılıma *asimtotik* durumda bir eğri özelliğinde olmaktadır. Serbestli derecesi küçüldükçe durum tersi hal almaktadır. Yani, simetrikliği bozularak normal dağılımdan ayrılmakta ve kendine özgü bir hal almaktadır.



Şekil 19: f serbestlik değerlerine göre farklı t- dağılım eğrileri

Sonuçta; bu şekilde tanımlanmış t dağılımı,

- $f(t)$ *Fonksiyonu* $-\infty \langle\ t\ \langle +\infty$ *aralığında değerlere sahiptir,*
- $f(t)$ *Fonksiyonu* $t=0$ *için maksimum değere sahiptir,*
- *Eğriye yatay asimtotik olan eksen* t *eksenidir,*
- *Maksimum noktasının her iki tarafında olmak üzere iki dönüm noktası mevcuttur,*
- $f(\infty)$ *İçin normal dağılma yaklaşır*

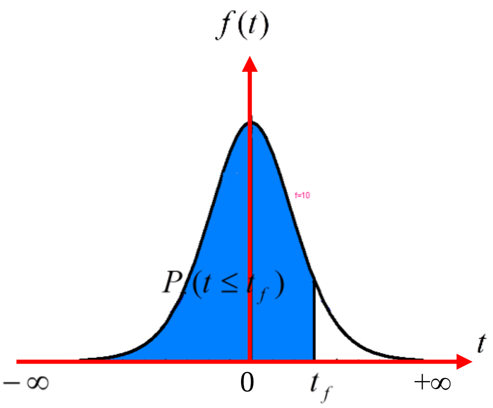
özelliklerine sahip normal dağılım eğrisinden biraz farklı bir eğri olduğu söylenebilir.

6.2.3 *t*-Dağılımıyla İlgili Hesaplamalar

Daha önceden farklı şekillerde düzenlenerek verilmiş olan, *t*-dağılımında kullanılan tablolarının argüman değerleri; P_r olasılık , t_f sınır değeri ile f serbestlik derecesi parametre elemanlarıdır. Bu parametreler hipotez testlerinin;

- *Tek ya da çift taraflı,*
- *Direkt veya invers problem çözümleri*

biçiminde irdelenmesinde aynen kullanılabilirler. Bu amaca yönelik daha önceden düzenlenmiş ve çeşitli amaçlar için halen kullanılmakta olan *t-dağılım* tabloları, tek taraflı bir hipotez için verilmiş olan Şekil 20'den de görüleceği gibi



Şekil 20: t- Dağılım eğrisi

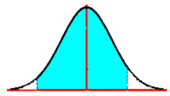
tamamıyla P_r , t_f ve f dağılımın parametreleri arasındaki yakın ilişkiye dayanmaktadırlar (Tablo 6).

Bu duruma göre, $P_r(t \le t_f)$ özelliğine sahip bir olasılık değerini ilgili t-dağılım tablosundan almak için, önce *t*-dağılım tablosunun birinci sütunundan f serbestlik derecesi değeri bulunur (*Tablo 6 veya Ek.2 t-dağılımı dağılım tablosu*). Sonra bu f değerine karşılık gelen satırdan ilgili t_f sınır değeri aranır. Bu t_f değerin bulunduğu sütuna karşılık gelen birinci satırdaki olasılık değeri aranan çift taraflı olasılık değeri, son satırdaki olasılık değeri de tek taraflı hipotez testi için kullanılacak olasılık değeri olmaktadır. Böyle bir değerin tablodan doğrudan bulunamaması halinde, ara değer için basit bir enterpolasyon işlemi yapılarak aranan sonuca ulaşılır.

Tablo 6: t-Dağılımının Dağılım Tablosu

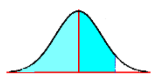
Çift yönlü dağılım tablosu değerleri: $t_{f,\alpha/2}$

f : *Serbestlik derecesi* $\quad \frac{\alpha}{2} = \frac{1-S}{2}$



f / S	%68.3	%90	%95	%98	%99	%99.9
1	*1.84*	*6.31*	*12.71*	*31.80*	*63.66*	*636.62*
2	*1.32*	*2.92*	*4.30*	*6.96*	*9.92*	*31.60*
3	*1.20*	*2.35*	*3.18*	*4.54*	*5.84*	*12.94*
4	*1.14*	*2.13*	*2.78*	*3.74*	*4.60*	*8.61*
5	*1.11*	*2.02*	*2.57*	*3.36*	*4.03*	*6.86*
6	*1.09*	*1.94*	*2.45*	*3.14*	*3.71*	*5.96*
7	*1.08*	*1.89*	*2.37*	*3.00*	*3.50*	*5.41*
8	*1.07*	*1.86*	*2.31*	*2.90*	*3.36*	*5.04*
9	*1.06*	*1.83*	*2.26*	*2.82*	*3.25*	*4.78*
10	*1.05*	*1.81*	*2.23*	*2.76*	*3.17*	*4.58*
15	*1.03*	*1.75*	*2.13*	*2.60*	*2.95*	*4.07*
20	*1.02*	*1.72*	*2.09*	*2.53*	*2.85*	*3.85*
25	*1.02*	*1.71*	*2.06*	*2.49*	*2.79*	*3.72*
30	*1.02*	*1.70*	*2.04*	*2.46*	*2.75*	*3.65*
40	*1.01*	*1.68*	*2.02*	*2.42*	*2.70*	*3.50*
∞	*1.00*	*1.64*	*1.96*	*2.33*	*2.58*	*3.29*
f / S	%84.1	%95	%97.5	%99	%99.5	%99.95

Tek yönlü dağılım tablosu değerleri: $t_{f,\alpha}$



Tersi durumdaki hesaplamalarda, olasılığı önceden verilmiş olan standart bir rastgele değişkenin bu olasılığa karşılık gelen sınır değerlerini bulmak için, ilgili sütunlardan verilen olasılık ve birinci sütundaki serbestlik derecesi değerlerinden de serbestlik derecesi değeri bulunarak her iki değere karşılık gelen satır ve sütunların kesişim yerindeki tablo değeri aranan sınır değeri olarak alınır. Aranan değerin tabloda doğrudan olmaması halinde ise, basit bir *enterpolasyon* işlemi yapılarak arzulanan sonuca ulaşılır.

Sonuçta; bir rastgele değişken $x \to t(f)$ dağılımına sahip ise, bu durumda;

$$P_r(x \le t_f) = \int_{-\infty}^{t_f} f(t)\ dt$$

t-dağılımına ilişkin (6-89a)'daki olasılık fonksiyonunun değeri, bu sınırlar arasındaki integraline eşit olur. Neticede burada tekrar vurgulamak gerekirse; uygulamada çoğu zaman bir dağılımın özelliğini gösteren kuramsal standart sapma değeri doğrudan bilinemez. Bu gibi durumlarda, ancak her zaman sonlu sayıda yapılan örnekleme ya da ölçü değerlerinden faydalanılarak ilgili parametrelerin en muhtemel değeri hesaplanarak bilinebilir. Bu durumda, deneysel gözlemlerin kullanılmış olduğu bir deneysel standart sapma değerinin hesabında f serbestlik derecesi artık ölçü sayısına denk bir değer olarak alınamaz. Uygulamada bu gibi durumlarda böyle bir değer, ancak *n: ölçü sayısı* ve *u bilinmeyen sayısı* olmak üzere, $f = n - u$ şeklindeki bir formülden hesaplanarak, yani parametre kestiriminde kullanılan *fazla ölçü* sayısı olarak alındıktan sonra benzer işlemler yapılabilir.

Sonuçta burada tekrar hatırlanacağı gibi; $f(t)$ (6-88)'deki olasılık fonksiyonunun $-\infty$ t_f sınır değerleri arasındaki integrali, bu sınır değerleri için Tablo 6 da verilmiş *t*-dağılım tablolardan alınacak olasılık değerlerine eşit bir değer olduğu ve ayrıca bu değerin t rastgele değişkeninin *f* serbestlik derecesine göre $P(-\infty < t < t_f)$ sınırları arasına düşme olasılık yüzdesini *(olasılığını)* temsil ettiği unutulmamalıdır.

Örnek 1: $x \to t(10)$, $f = 10$ olarak verilen bir x rastgele değişkeninin $P_r(x \le 1,81) = ?$ olma olasılığı ne kadar olduğunun belirlenmesi istenmektedir.

Çözüm 1: Böyle bir problemin çözümü için *t*- dağılım tablosundan, *f=10* serbestlik derecesi ve tek taraflı dağılıma ilişkin tablonun en altındaki olasılık satırından $t_{0.95} = 1,81$ bulunarak $P_r(x \le 1,81) = 0,95$ olduğu hesaplanır.

Sonuç: $P_r(x \le 1,81) = 0,95$ olduğu söylenir.

Örnek 2: $x \to t(10)$ dağılımına sahip ve serbestlik derecesi *f*=10 olarak verilen bir x rastgele değişkeninin $P_r(|x| \ge 2,23) = ?$ olma olasılığı nedir?

Çözüm 2: Böyle bir problemin çözümü için, Tablo 6 da verilmiş olan t- dağılım tablosunun $f=10$ serbestlik derecesine karşılık gelen satırdan 2.23 sınır değeri bulunarak buna karşılık gelen olasılık değeri tablonun en altındaki tek taraflı olasılık yüzdeleri satırından $t_{0,975}=2,23$ olarak alınır (Tablo 6). Sonra;

$$P_r(x \geq t_{0,975}) = 1 - P_r(x \leq t_{0,975}) = 1 - 0,975 = 0,025$$

kuralına göre hesaplanır. Daha sonra x rastgele değişkeni için mutlak değer kullanılmış olduğundan, x ‘in negatif değerler de alabileceği düşünülerek, bu bölgedeki yanılma olasılığının da pozitif değerli olması yanında dikkate alınması $P_r(|x| \geq 2,23) = 2\,(0,025) = 0,05$ olarak hesaplanır.

Sonuç: $P_r(|x| \geq 2,23) = 2\,(0,025) = 0,05$ olur.

Örnek 3: $x \rightarrow t(15)$, f=15 olarak verilen bir x rastgele değişkeninin $P_r(-t_f \leq x \leq t_f) = 0,90$ olması için alt ve üst sınır değerleri $t_f = ?$ ne kadar olmalıdır.

Çözüm 3: Böyle bir problemin çözümü için yukarıdaki örneklerde gerçekleştirilmiş çözümlerdeki mantığa benzer düşünceler burada da dikkate alınması ile,

$$\begin{aligned}P_r(-t_f \leq x \leq t_f) &= P_r(x \leq t_f) - P_r(x \leq -t_f) = \\ &= P_r(x \leq t_f) - \{1 - P_r(x \leq t_f)\} = \\ &= 2P_r(x \leq t_f) - 1 = 0,90\end{aligned}$$

olasılık bağıntısından, $P_r(x \leq t_f)$ olma olasılığı değeri çekilerek,

$$P_r(x \leq t_f) = \frac{1 + 0,90}{2} = 0,95$$

ilişkisi hesaplanır. Neticede, yapılan hesaplamalardan $P_r(x \leq t_f) = 0,95$ olasılık ilişkisi elde edilmiş olur. Sonra, bu $P_r(x \leq t_f) = 0,95$ olasılık değeri için ilgili t- dağılım tablosundan; $f=15$ serbestlik derecesi ve tablonun birinci satırında çift taraflı dağılımlar için verilmiş olan $S=0.95$ olasılık yüzde değerleri hesaplanarak her iki değerin bulunduğu satır ve sütunların kesiştiği yerdeki $P_r(x \leq t_f) = 0{,}95$ olasılığını sağlayan *t*-dağılım tablo değeri bu olasılığa ilişkin t_f sınır değeri $t_{0,95} = 2{,}13$ olarak bulunur. Böylece, $P_r(-t_f \leq x \leq t_f)$ olasılık değerinin alt ve üst sınır değerleri $-t_f = -2{,}13$ ve $t_f = 2{,}13$ olarak hesaplanmış olur.

Sonuç : $\pm t_f = 2{,}13$ sınır değerleri için ancak $P_r(-t_f \leq x \leq t_f) = 0{,}90$ olur.

6.3. χ^2-Dağılımı *(Chi-kare Dağılımı)*

İlk kez 1876 yılında *Helmert* tarafından verilmiş olan χ^2-dağılımı, 1900 yıllarında ilkinden bağımsız olarak ikinci kez *Pearson* tarafından ortaya atılmış ve aynı zamanda kullanılmış bir istatistik dağılım türüdür. Böyle bir dağılım; x rastgele değişkenli ve λ, n parametreli bir gama dağılımda $\lambda = 2$, $n = \nu / 2$ alınarak elde edilmiş bu dağılımın ν parametreli özel bir hali olmaktadır. Günümüzde bile, olasılık kuramı ve istatistik biliminde birçok amaçlar için yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Burada, özet de olsa, böyle bir dağılımın matematiksel temel özellikleri ele alınarak, mevcut tablo değerlerinin pratik amaçlı bazı problemlerde kullanılmaları örneklemeli olarak açıklanacaktır.

6.3.1. χ^2-Dağılım Fonksiyonu

İstatistikte rastgele değişkenlerin karesel formlarının irdelenmesinde sıkça kullanılan χ^2-kare dağılımı gama dağılımının özel bir durumudur. Böyle bir özelliğe göre α değişkeninin gama fonksiyonu;

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \qquad 6\text{-}90$$

olarak ifade edilebilir. Bu (6-90) integralı $\alpha \rangle 0$ değeri için her zaman mevcut ve pozitif bir değere sahiptir. Bu gibi değerler α değişkeninin alacağı farklı değerlere göre;

$\alpha = 1$ için

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-y} dy = 1 \qquad 6\text{-}91a$$

ve $\alpha \rangle 1$ olması durumunda ise,

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\int_0^\infty y^{\alpha-2} e^{-y} dy = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \qquad 6\text{-}91b$$

olarak verilmektedir. Ayrıca, eğer $\alpha \rangle 1$ ve pozitif bir tamsayı değerinde ise;

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2) \;\ldots\ldots\; (3)(2)(1) = (\alpha-1)!$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$$

dır. Ayrıca yine bu (6-90)'da verilmiş olan $\Gamma(\alpha)$ integralin bağıntısında $\beta\rangle 0$ değeri için $y = {}^{x}\!/_{\beta}$ gibi bir değişken dönüşümü yapılarak

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty (\frac{x}{\beta})^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta}) \frac{1}{\beta}\, dx$$

ve

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta})\ dx \qquad 6\text{-}92$$

integralinin birbirlerine eşdeğer oldukları görülür *(Wells – Krakıwsky 1971)*. Bu integral bağıntısı, parametreleri α ve β olan bir gama dağılımına sahip, olasılık fonksiyonu;

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta}) \quad &;\quad & (0 \langle x \langle \infty) \\ f(x) &= 0 &;\quad & Aksi \ \ halde \end{aligned} \qquad 6\text{-}93$$

olan iki parametre için bir bileşik dağılım fonksiyonunun isteklerine cevap vermektedir. Burada, bu gibi özellikleri içerecek biçimde tanımlanmış olan χ^2-kare dağılımının olasılık fonksiyonu, gama fonksiyonunun $x = f$ pozitif tamsayı ve $\beta = 2$ değerleri için

$$\alpha = \frac{f}{2}$$

alınarak elde edilen $y = \alpha$ değerleri göre ifade edilmiş, gama dağılımının özel bir hali olduğu görülür. Bunun sonucunda, (6-93) ifadesinden hareketle de olasılık fonksiyonu;

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{f}{2})\ 2^{f/2}} x^{(\frac{f}{2}-1)} e^{-x/2} \quad &;\quad & (0 \le x \langle \infty) \\ f(x) &= 0 &;\quad & Aksi \quad halde \end{aligned} \qquad 6\text{-}94$$

şeklinde bir fonksiyon olur. Dolayısı ile, sürekli türden bir rastgele değişken olan x rastgele değişkenin böyle bir olasılık fonksiyonuna sahip olduğu artık rahatlıkla söylenebilir.

Burada tekrar vurgulamak gerekir ki; f parametresine göre tanımlanmış olan bu dağılımda; *f parametre değeri sadece dağılımın serbestlik derecesini* göstermektedir. Ayrıca burada özel bir not olarak hatırlatmak gerekirse; önceki konularda sözü edildiği gibi dengeleme hesabı kurallarına göre gerçekleştirilen parametre kestiriminde serbestlik derecesi pratik bir değer olup *En küçük kareler tahmin* yöntemiyle sıkı bir ilişkisi mevcuttur. *En küçük kareler* kestirim yöntemiyle gerçekleştirilecek bir dengeleme hesabı probleminin çözümünde böyle bir ilişki; *n veri sayısı*, *u bilinmeyen parametre sayısı* olmak üzere $f = n - u$ biçiminde ifade edilebilir. Bunun neticede de bazı pratik gösterim amaçları için sağladığı kolaylıklar göz önünde bulundurularak χ^2 *-dağılım* fonksiyonu çoğu uygulamalar için $\chi^2(f)$ olarak da gösterilmektedir.

6.3.2. χ^2 -Kare Dağılımında Moment Üreten fonksiyonlar

Çoğu zaman olasılık veya dağılım fonksiyonunun doğrudan bilinmediği durumlarda bunların yerine kullanılabilecek χ^2 -kare dağılımının moment üreten fonksiyonu,

$$M(t) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)\ dx \qquad \text{6-95a}$$

$$M(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\frac{f}{2})\ 2^{f/2}} x^{(\frac{f}{2}-1)} \exp(-\frac{x}{2})\ dx \qquad \text{6-95b}$$

$$M(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\frac{f}{2}) 2^{f/2}} x^{(\frac{f}{2}-1)} \exp(-\frac{x(1-2t)}{2})\ dx \qquad \text{6-95c}$$

olarak momentler konusu ile ilgili temel tanımlardan faydalanılarak verilebilir. Burada; *y=x(1-2t)/2* ve *x=2y/(1-2t)* değişken değişikliği yapıldığında bunların yerine geçebilecek diğer bir ifade şekli için,

$$M(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\frac{f}{2})\ 2^{f/2}} (\frac{2y}{1-2t})^{\frac{f}{2}-1}\ e^{-y}\ dy$$

$$M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{f/2}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{f}{2})} y^{(\frac{f}{2}-1)}\ e^{-y}\ dy \qquad \text{6-96}$$

$$M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{f/2}}$$

bağıntıları elde edilmiş olur. Daha sonra, burada (6-96)'da verilmiş formüllerden faydalanılarak, birinci dereceden moment değeri ile ikinci dereceden merkezsel moment değerleri için daha önceki konularda diğer dağılımlarla ilgili moment üreten fonksiyonlarda yapılan işlemlere benzer şekilde bir yol izlenerek ve gerekli hesaplamaların da yapılması neticesinde;

$$M'(t) = (-\frac{f}{2})(1-2t)^{-(\frac{f}{2}+1)}(-2) = f(1-2t)^{-(\frac{f}{2}+1)}$$

ve

$$M''(t) = (-\frac{f}{2})(-\frac{f}{2}-1)(1-2t)^{-(\frac{f}{2}+2)}(-2)^2 = f(f+2)(1-2t)^{-(\frac{f}{2}+2)}$$

formülleri elde edilir. Sonuçta, bu bağıntılarda $t = 0$ seçilerek χ^2-kare dağılımının umut değeri ve varyansı,

$$\mu = M'(0) = f \qquad 6\text{-}97a$$

$$\sigma^2 = M''(0) - \{M'(0)\}^2 = (f^2 + 2f) - f^2 = 2f \qquad 6\text{-}97b$$

olarak elde edilebilir.

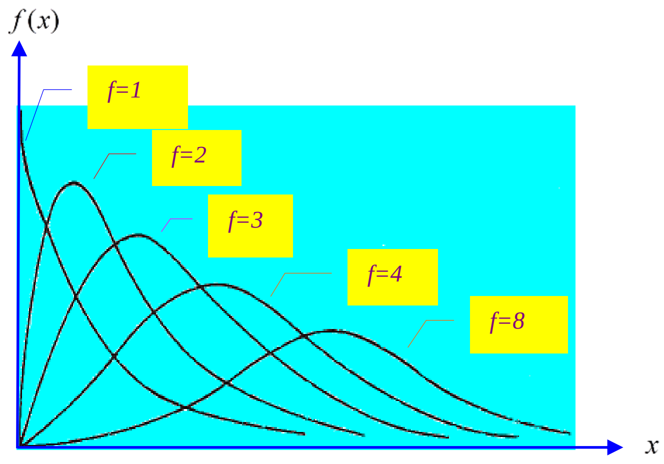
Neticede; $x_i \to N(0,1)$ şeklinde $\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ parametrelerine göre her biri ayrı ayrı standart normal dağılıma sahip $x_1, x_2, ..., x_f$ gibi f sayıda rastgele değişkenlerinin toplamı olarak elde edilen

$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + ...+ x_f^2 \qquad 6\text{-}97c$$

χ^2 rastgele değişkeni f serbestlik derecesine göre χ^2-dağılımda olur. Böylece; (6-97) ‘den görüldüğü gibi χ^2 dağılımındaki bir rastgele değişkenin umut değeri ve standart sapması,

$$\mu_{\chi^2} = E\{\chi^2\} = f \quad \text{ve} \quad \sigma_{\chi^2} = \sqrt{2f}$$

bağıntılarından hesaplanabilir.



Şekil 21: χ^2-Dağılımının olasılık fonksiyonu

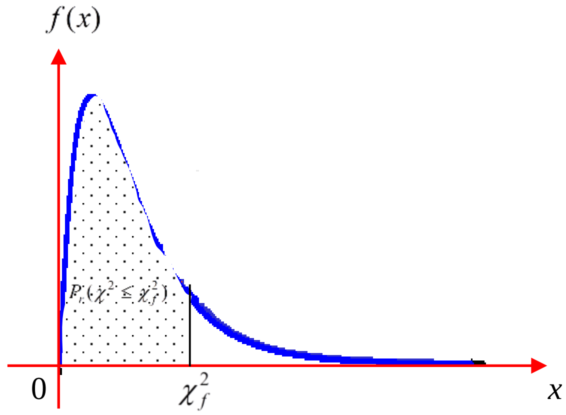
Sonuçta, bu açıklamalardan da görülebileceği gibi χ^2- dağılımının tüm parametreleri her zaman f serbestlik derecesine bağlı değerler olmaktadır. f serbestlik derecesi değiştikçe parametre değerleri de benzer oranda değişmektedir. Bu duruma paralel olarak da her birinin sergilediği eğri grafiği diğerlerine nazaran, benzer şekilde farklılıklar içermektedir. χ^2- dağılımı için böyle bir değişim, f serbestlik derecesinin bazı değerleri için Şekil 21'de verilmiş olan grafiklerden açıkca görülebilir. Buradan, f serbestlik derecesi büyük olduğu oranda χ^2- dağılımına sahip bir rastgele değişken yaklaşık benzer oranda,

$$\chi^2 \rightarrow N(f\,,\,\sqrt{2f})$$

parametrelerine göre normal dağılımda olduğu söylenebilir. Yine Şekil 21'deki grafiklerin incelenmesinden, bu özellikteki bir rastgele değişkenin f serbestlik derecesinin küçük olduğu durumlarda, normal dağılımdan uzaklaşılarak kendine özgü geometrik özellikleri olan χ^2 - dağılımlı bir rastgele değişken ve (6-98) fonksiyonu ile verilen bir dağılıma sahip olduğu görülür.

6.3.3. χ^2 - Dağılım Eğrisi

Burada, konu ile ilgili olarak yapılan bazı genel açıklamalardan sonra χ^2-dağılımı eğrisinin aşağıdaki başlıca özelliklere sahip bir eğri özelliğinde olduğu söylenebilir.



Şekil 22: χ^2 *-Dağılım eğrisi*

Bu duruma göre bir χ^2 - dağılım eğrisi için ilgili bazı özellikler,

- *x=0 değeri için; değeri sıfırdır,*
- $0 \langle x \langle \infty$ *aralığında bir Maksimum değeri mevcuttur,*
- $0 \langle x \langle \infty$ *de* x *eksenine asimtotik dır,*
- *Her Maksimum için bir dönüm noktasına sahiptir,*
- x *rastgele değişkenin alacağı bütün değerler için pozitif değerlidir,*

şeklinde sıralanabilir. Bu özelliklerin son bir ürünü olarak da Şekil 22'deki grafik ifadesinden açıkca görülebileceği gibi; χ^2 - dağılım eğrisinin altında χ_f^2 sınır değeri ile sınırlı taralı alanın değeri, her zaman $P_r(\chi^2 \leq \chi_f^2) = S$ biçiminde "*bir* χ^2 *rastgele değişkeninin belli bir olasılık seviyesine göre tanımladığı*" χ_f^2 sınır değerinden küçük olma olasılığını temsil etmektedir.

6.3.4. χ^2 -Dağılımına İlişkin Hesaplamalar

Konuyla ilgili bir çok problemin tablo değerleri kullanılarak çözümünde; χ^2 -dağılım tablolarına girmek için olası argümanlar; P_r olasılığı, ya da $P_r = S = 1 - \alpha$ güven aralığı ile χ_f^2 apsis değeri *(sınır değeri)* ve f serbestlik derecesidir. Bu argümanların bazıları kullanılarak, direkt problem çözümlerde bu tablolara; $P_r = S$ güven olasılığı ya da düzenlenmiş bazı özel tablolar için $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ve f serbestlik derecesi ile girilir. Bunun neticesinde χ_f^2 *apsis* ya da *sınır değeri* ilgili tablodan doğrudan ya da lineer enterpolasyonla bulunur. Buna karşılık invers problem çözümlerinde, direkt çözümün tersi yönde bir yol izlenerek, χ^2 - dağılımın tablolarına χ_f^2 apsis değeri ve f serbestlik derecesi ile girilerek P_r olasılık değeri doğrudan ya da lineer enterpolasyonla bulunur.

Neticede buradan; χ^2 -dağılımın tablolarının kullanımı $P_r = S$ güven ya da $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile χ_f^2 apsis değeri ve f serbestlik derecesi argümanlarının arasındaki ilişkiye dayanmaktadır denebilir. Pratikte oldukça yaygın bir biçimde kullanılmakta olan bu duruma rağmen bazı çok özel durumlar için eğer bir x rastgele değişkeni χ^2 - dağılımında ise; o zaman onun $(-\infty, \chi_f^2)$ aralığına düşme P_r olasılığı;

$$P_r(x \leq \chi_f^2) = \int_0^{\chi_f^2} \frac{1}{\Gamma(\frac{f}{2})\, 2^{f/2}} \, x^{(\frac{f}{2}-1)} e^{-\frac{x}{2}} \, dx \qquad \text{6-98}$$

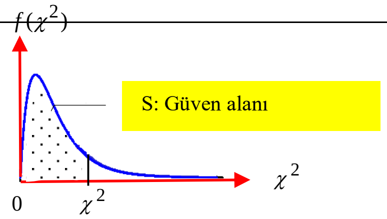
şeklindeki bir integral bağıntısından doğrudan analitik olarak da hesaplanabilir. Ancak, çoğu problemler için böyle bir integral işleminin her seferinde hesaplanması oldukça zahmetli, zaman alıcı ve karmaşık bir işlem olduğundan pratikte çoğu uygulamalar için daha pratik olması nedeniyle tablo kullanarak çözümün gerçekleşmesi yolu seçilir.

Bu nedenle, daha önce de sözü edildiği gibi, böyle bir integral alma işlemi; *0* ve *1* arasındaki olasılık değerlerini alabilen, P_r olasılık ve f serbestlik derecesi parametre değerlerine karşılık gelen özel χ_f^2 apsis değerlerine göre önceden hesaplanarak daha sonraki uygulamalarda kullanılmak üzere tablolar halinde düzenlenerek uygulamaya sunulmuş vaziyette çeşitli şekillerde hazırlanmış χ^2 dağılım tabloları mevcuttur. Bu tür tablolar, uygulamacılar için χ^2 - dağılım tablosu olarak bilinmektedir. Pratikte, aynı kullanım amaçlarına yönelik önceden farklı düzende veya biçimde düzenlemiş χ_f^2 - dağılım tablolarına rastlamak mümkündür. Bunların hepsinin kullanım amacı aynı olmakla birlikte aralarındaki işlem farklılıklarını açıkca görmek amacıyla bazıları ile ilgili örnek χ^2 - dağılım tabloları, Tablo 7 ve Ek.3'de verilmiştir.

Buna göre; Tablo 7'de verilmiş olan ilgili χ^2 - dağılım tablosunun incelenmesinden de görüleceği gibi, tablonun ilk ve son sütunlarında doğrudan f serbestlik derecesi ve yine ilk satırında da $S = P_r$ güven ya da olma olasılık değerleri verilmiştir. Belli bir olasılığa ve serbestlik derecesine karşılık gelen χ_f^2

sınır değeri diğer satır ya da sütunlarda yer almaktadır. Ek 3'de verilmiş olan χ^2 - dağılım tablosunda durum aynı olmakla beraber bunun farklı yanı Tablo 7'deki tablonun ilk satırındaki $S = P_r$ güven olasılığı yerine $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılık değerlerinin kullanılmış olmasıdır.

Tablo 7: χ^2 Dağılımının Dağılım Tablosu



χ^2 - Dağılımının Dağılım Tablosu

s / f	0,005	0,010	0,025	0,050	0,95	0,975	0,99	0,995	s / f
1	0,000	0,000	0,001	0,004	3,841	5,024	6,635	7,879	1
2	0,010	0,020	0,051	0,103	5,991	7,378	9,210	10,597	2
3	0,072	0,115	0,216	0,352	7,815	9,348	11,345	12,838	3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	9,488	11,143	13,277	14,860	4
5	0,412	0,554	0,831	1,145	11,071	12,833	15,086	16,750	5
6	0,676	0,872	1,237	1,635	12,592	14,449	16,812	18,548	6
7	0,989	1,239	1,690	2,167	14,067	16,013	18,475	20,278	7
8	1,344	1,646	2,180	2,733	15,507	17,535	20,090	21,955	8
9	1,735	2,038	2,700	3,325	16,919	19,023	21,666	23,589	9
10	2,156	2,558	3,247	3,940	18,307	20,483	23,209	25,188	10
11	2,603	3,053	3,816	4,575	19,675	21,920	24,725	26,757	11
12	3,074	3,571	4,404	5,226	21,026	23,337	26,217	28,300	12
13	3,565	4,107	5,009	5,892	22,362	24,736	27,688	29,819	13
14	4,075	4,660	5,629	6,571	23,685	26,119	29,141	31,319	14
15	4,601	5,229	6,262	7,261	24,996	27,488	30,578	32,801	15
16	5,142	5,812	6,908	7,962	26,296	28,845	32,000	34,267	16
17	5,697	6,408	7,564	8,672	27,587	30,191	33,409	35,719	17
18	6,265	7,015	8,231	9,390	28,869	31,526	34,805	37,156	18
19	6,844	7,633	8,907	10,117	30,144	32,852	36,191	38,582	19
20	7,434	8,260	9,591	10,851	31,410	34,170	37,566	39,997	20
21	8,034	8,897	10,283	11,591	32,671	35,409	38,932	41,401	21
22	8,643	9,542	10,982	12,338	33,924	36,781	40,289	42,796	22
23	9,260	10,196	11,689	13,091	35,173	38,076	41,638	44,181	23
24	9,886	10,856	12,401	13,848	36,415	39,364	42,980	45,559	24
25	10,520	11,524	13,120	14,611	37,653	40,647	44,314	46,928	25
26	11,160	12,198	13,844	15,379	38,885	41,923	45,642	48,290	26
27	11,808	12,879	14,573	16,151	40,113	43,194	46,963	49,645	27
28	12,461	13,565	15,308	16,928	41,337	44,461	48,278	50,993	28
29	13,121	14,257	16,047	17,708	42,557	45,722	49,588	52,336	29
30	13,787	14,954	16,791	18,493	43,773	46,979	50,892	53,672	30
40	20,707	22,164	24,433	26,509	55,759	59,342	63,691	66,766	40
50	27,991	29,707	32,357	34,764	67,505	71,420	76,154	79,490	50
60	35,535	37,485	40,482	43,188	79,082	83,298	88,379	91,952	60
70	43,275	45,442	48,758	51,739	90,531	95,023	100,425	104,215	70
80	51,172	53,540	57,153	60,392	101,879	106,629	112,329	116,321	80
90	59,196	61,754	65,647	69,126	113,145	118,136	124,116	128,299	90
100	67,328	70,065	74,222	77,980	124,342	128,561	135,807	140,169	100

Örnek 1: $x \to \chi^2(10)$; f *serbestlik derecesi = 10 olan* bir x rastgele değişkeninin $P_r(x \le 18{,}307) = ?$ olma olasılığı ne kadar olur.

Çözüm 1: Bu gibi bir problemin çözümü için, χ^2- dağılım tablosunun birinci sütunu olan f sütunundan, *f=10* serbestlik derecesine karşılık gelen satırdan $\chi^2_f = 18{,}307$ sınır ya da kritik değeri alınır. Sonra, buna karşılık gelen olasılık değeri, $\chi^2_f = 18{,}307$ değerinin bulunduğu sütunun birinci satırından S=0,95 olarak elde edilir.

Sonuç: $\chi^2_{0,95}(10) = 18{,}307$ için $P_r(x \le 18{,}307) = S = 0{,}95$ olarak bulunmuş olur.

Örnek 2: $x \to \chi^2(20)$ (f *serbestlik derecesi=20 olan*) bir x rastgele değişkeninin $P_r(9{,}591 \le x \le 34{,}170) = ?$ olma olasılığı ne kadar olur.

Çözüm 2: Daha önceki örnek problemlerin çözümünde yapılan işlemlere benzer şekilde burada da, χ^2 - dağılım tablosu kullanılarak; $\chi^2_f = \chi^2_{20}$=9,591 için $\chi^2_{2\ 0\ 0,0\ 2\ 5} = 9{,}5\ 9$ veya daha açık yazılımla $P_r(x \le \chi^2_{20}) = 0{,}025$ ve benzer şekilde $\chi^2_f = \chi^2_{20} = 34{,}170$ için de $\chi^2_{20,\ 0,975} = 34{,}170$ veya $P_r(x \le \chi^2_{20}) = 0{,}975$ değerle bulunur. Daha sonra buradan bir x rastgele değişkenin bu sınırlar arasında $P_r(9{,}591 \le x \le 34{,}170) = ?$ bulunabilme olasılığı için,

$$P_r(\chi^2_{20,\ 0,025} \le x \le \chi^2_{20,0,975}) = P_r(x \le \chi^2_{20,\ 0,975}) - P_r(x \le \chi^2_{20,\ 0,025}) = 0{,}975 - 0{,}025 = 0{,}95$$

değeri hesaplanır.

Sonuç: Problemin çözümünden $P_r(9{,}59 \le x \le 34{,}17) = 0{,}95$ olarak bulunmuş olur.

Örnek 3: Konuyla ilgili bir diğer problemde, $x \to \chi^2(10)$; (f *serbestlik derecesi=10 olan*) bir x rastgele değişkeninin; $P_r(x \le \chi^2_f) = 0{,}99$ olması için

$\chi^2_f = ?$ ne kadar olmalıdır.

Çözüm 3: Bu problemin çözümü için de daha önce çözümü gerçekleştirilmiş örnek problemlere benzer şekilde bir işlem yolu izlenerek, $S = 0{,}99$ anlamlılık seviyesine göre ilgili χ^2 - dağılım tablosundan; $P_r(x \le \chi^2_{0,99}) = 0{,}99$ olasılık değeri için *f* serbestlik derecesi kullanılarak, $\chi^2_{10\,,\,0,99} = 23{,}209$ sınır ya da kritik değeri bulunur.

Sonuç: Bunun sonucunda $P_r(x \le \chi^2_f) = 0{,}99$ için $\chi^2_f = 23{,}209$ olur.

Örnek 4: $x \to \chi^2(20)$; (*f serbestlik derecesi=20 olan*) bir x rastgele değişkeninin $P_r(\chi^2_{f_1} \le x \le \chi^2_{f_2}) = 0{,}99$ olması için, dağılımın her iki uçundaki olmama olasılık durumlarının eşit olması halinde $\chi^2_{f_1} = ?$, $\chi^2_{f_2} = ?$ değerleri ne kadar olmalıdır.

Çözüm 4: Bu problemin çözümünde de daha önceki örnek problemlerin çözümüne benzer şekilde bir işlem yolu izlenerek önce χ^2 - dağılım tablosu kullanılmak suretiyle; $\chi^2_{f_1} = ?$ ve $\chi^2_{f2} = ?$ değerleri öyle hesaplanacak ki problemin verilmiş halindeki olumlu durumunun zıttı yönü temsil eden

$$1 - P_r(\chi^2_{f_1} \le x \le \chi^2_{f_2}) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$$

olmama olasılık değerinin her iki uçtaki olmama olasılık miktarları birbirine eşit olsun. Bu özellikteki bir değer dağılımın her iki uçunda temsil eden bir değer, olmama olasılığını temsil eden $0{,}01$ toplam olumsuzluk olasılığının yarısı kadar olur ve dağılımın sol ucundaki değeri $P_1 = 0{,}005$ ve sağ ucundaki değeri de $P_2 = 0{,}995$ kadar olmaktadır. Analitik olarak böyle bir durumun daha açık bir ifadesi

$$P_r(\chi^2_{0,005} \le x \le \chi^2_{0,995}) = P_r(x \le \chi^2_{0,995}) - P_r(x \le \chi^2_{0,005}) = P_2\text{-}P_1 = 0{,}995 - 0{,}005 = 0{,}99$$

olarak yazılabilir. Böyle bir düşüncenin neticede her bir olasılık değerine karşılık gelen sınır değerleri, ilgili χ^2 - dağılım tablosundan, *f=20* serbestlik derecesine göre $\chi^2_{20\,,\,0,005} = 7{,}434$ ve $\chi^2_{20\,,\,0,995} = 39{,}997$ olarak elde edilir.

Sonuç: Bu problem için $\chi^2_{f_1} = 7{,}434$ ve $\chi^2_{f_2} = 39{,}997$ kadar olmalıdır.

6.4. *F-Fisher* Dağılımı

Günümüzde, birçok istatistik bilim dalında yaygın biçimde kullanılmakta olan *F-FİSHER dağılımı* sürekli türden bir olasılık dağılımı türüdür. Bu dağılımı ilk defa 1920 ve 1930'lı yıllarda İngiliz istatistikçisi ve aynı zamanda genetikçi olan *R. A. FISHER* ve *GEORGE W. SNEDECOR* tarafından, iki grubun bir ortalama etrafındaki varyanslarının anlamlılık seviyesini belirlemek amacıyla, varyans analizinde kullanıldığı ilgili kaynaklarda yer almaktadır. Bu nedenle, çoğu zaman bu yönteme *SNEDECOR* veya *F-DAĞILIMI* olarak bilinmesine rağmen, günümüzde yaygın biçimde kullanılmakta olan bir diğer adıyla *FİSHER* dağılımı da denmektedir.

6.4.1. *F-Fisher* Dağılım Fonksiyonu

F-Fiher dağılımı; her biri normal dağılımlı rastgele değişkenlerden karesel toplamları biçiminde üretilmiş olan iki farklı χ^2 - dağılımının birbirine oranı temel alınarak geliştirilmiş bir diğer test dağılım türüdür. Böyle bir dağılım türü için, her bir farklı χ^2 - dağılımına sahip rastgele değişkenlerin serbestlik dereceleri f_1 ve f_2 olan u ve v gibi iki adet χ^2 - dağılımlı rastgele değişkenin bileşik olasılık fonksiyonu;

$$f(u,\mathrm{v}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\ \Gamma(\frac{f_2}{2})\ 2^{(f_1+f_2)/2}}\ u^{(\frac{f_1}{2}-1)}\ \mathrm{v}^{(\frac{f_2}{2}-1)}\ e^{-(\mathrm{u}+\mathrm{v})/2} \quad ; \quad \begin{matrix} 0 \langle\, u \,\langle +\infty \\ 0 \langle\, \mathrm{v} \,\langle +\infty \end{matrix} \qquad \text{6-99a}$$

$$Aksi \quad halde \qquad f(u,v) = 0$$

şeklindeki bir üstel fonksiyonla ifade edilebilir. Bu iki rastgele değişkenden, her birinin serbestlik derecesi de dikkate alınarak,

$$f = \frac{u/f_1}{\mathrm{v}/f_2} \qquad \text{6-99b}$$

şeklinde bir yeni rastgele değişken tanımlanarak, bu yeni rastgele değişkenin marjinal olasılık fonksiyonu da $f(f)$ biçiminde tanımlanabilir. Böyle bir işlemle ilgili dönüşüm denklemleri;

$$f = \frac{u/f_1}{\mathrm{v}/f_2} \quad , \quad z = \mathrm{v} \qquad \text{6-99c}$$

ve

$$u = \frac{f \ f_1 \ z}{f_2} \qquad , \qquad v = z \qquad \text{6-100}$$

dönüşümlerin *Jacobiyeni* de;

$$|J| = \det(J) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial f} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial f} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{f_1 z}{f_2} & \frac{f_1 f}{f_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{f_1 z}{f_2} \qquad \text{6-101}$$

olur. Neticede, buradan f ve z rastgele değişkenlerinin birleşik olasılık fonksiyonu;

$$f(f,z) = f(u,v)\det(J) = \frac{1}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\Gamma(\frac{f_2}{2})2^{(f_1+f_2)/2}} (\frac{z f_1 f}{f_2})^{(\frac{f_1}{2}-1)} z^{(\frac{f_2}{2}-1)} \exp\left\{\frac{-z}{2}(\frac{f_1 f}{f_2}+1)\right\} \frac{f_1 z}{f_2} \qquad \text{6-102}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, z değişkeni integral dışı bırakılarak $f(f)$ marjinal olasılık fonksiyonu;

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(f,z)dz =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{(\frac{f_1}{f_2})^{f_{1/2}} (f)^{(\frac{f_1}{2}-1)}}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\Gamma(\frac{f_2}{2})2^{(f_1+f_2)/2}} z^{(\frac{f_1+f_2}{2}-1)} \exp\left\{-\frac{z}{2}(\frac{f_1 f}{f_2}+1)\right\}dz \qquad \text{6-103}$$

ve bunun devamında,

$$y = \frac{z}{2}(\frac{f_1 \ f}{f_2}+1) \qquad \text{6-104}$$

şeklinde yeni bir değişken değişikliği yapıldığında, buna karşılık gelen marjinal olasılık fonksiyonu da

$$F(f) = \int_{0}^{+\infty} \frac{(\frac{f_1}{f_2})^{\frac{f_1}{2}} (f)^{(\frac{f_1}{2}-1)}}{\Gamma(\frac{f_1}{2}) \ \Gamma(\frac{f_2}{2}) \ 2^{(f_1+f_2)/2}} \ (\frac{2y}{\frac{f_1 f}{f_2}+1})^{(\frac{f_1+f_2}{2}-1)} \ e^{-y} \ (\frac{2}{\frac{f_1 f}{f_2}+1}) \ dy \qquad \text{6-105}$$

şeklindeki bir üstel fonksiyonla ifade edilebilir. Daha sonra, bu bağıntının $(0,+\infty)$ aralığında integrali alındıktan sonra elde edilecek dağılım fonksiyonu;

$$F(f)=\frac{\Gamma\{(f_1+f_2)/2\}(f_1/f_2)^{f_1/2}}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\,\Gamma(\frac{f_2}{2})}\;\frac{(f)^{\frac{f_1}{2}-1}}{(1+\frac{f_1 f}{f_2})^{(f_1+f_2)/2}} \quad ; \quad (0 \langle f \langle +\infty) \qquad \text{6-106a}$$

$$\textit{Aksi durumlarda} \qquad F(f)=0$$

olarak elde edilmiş olur *(Wells.–Krakıwsky 1971).* Burada, farklı serbestlik derecelerine göre her biri,

$$u \to \chi^2(f_1) \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{v} \to \chi^2(f_2)$$

ifadelerine göre χ^2 - dağılımlarında olan u ve v rastgele değişkenlerinden;

$$f=\frac{u/f_1}{\mathrm{v}/f_2} \qquad \text{6-106b}$$

oranına göre hesaplanan f rastgele değişkeni de aynı şekilde *F- dağılımında* olmaktadır ve özetle, bazı pratik amaçlı çalışmalar için bu dağılım $F(f_1, f_2)$ olarak da gösterilebilir. Burada, f_1 ve f_2 serbestlik dereceleri $F(f_1, f_2)$ dağılımını tanımlayan önemli parametrelerden sadece ikisi olmaktadır. Yine burada *F-Fisher* dağılımı ile ilgili üzerinde durulması gereken diğer bir önemli gerçek de $1/f$ gibi, bir rastgele değişkenin tersi değerinin, f_2 ve f_1 parametrelerine göre yine bir *F-dağılımına* sahip olmasıdır. Böyle bir sonuç yukarıdaki işlem yolu takip edilerek benzer şekilde açıklanabilir. Buna benzer durumda;

$$\frac{1}{F_S(f_1, f_2)}=F_{1-S}(f_2, f_1)$$

ilişkisinin varlığı rahatlıkla yazılabilir.

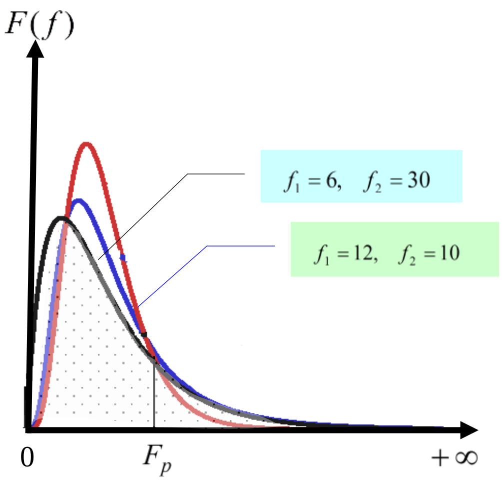
Sonuçta, yukarıda *F- dağılımı* ile ilgili yapılmış bir çok açıklamalardan, pay ya da paydadan birinin serbestlik derecesi ∞ olduğu hallerde *F- Fisher* dağılımı, *(burada $f_2=\infty$ alınarak f_1 serbestlik derecesine göre*),

$$F(f_1,\infty)=\chi^2(f_1)$$

parametreli χ^2 dağılımına eşit olduğu açıkça görülebilir. Bu eşitlik aynı zamanda, *F-dağılımı* ile χ^2 - *dağılımı* arasındaki yakın bağlantı ilişkisinin varlığının açık bir kanıtı olmaktadır.

6.4.2. *F*-Fisher Dağılım Eğrisi

F-Fisher dağılım eğrisi iki adet χ^2 dağılımını temsil ettiğinden dolayı oldukça karmaşık bir dağılım fonksiyonuna sahip olmaktadır. Böyle bir karmaşıklık daha çok dağılım fonksiyonunun rastgele değişkenini tanımlamada kullanılmakta olan (6-106b) bağıntısındaki payın ve paydanın her biri farklı serbestlik derecesine sahip rastgele değişkenler olmasından kaynaklanmaktadır. Bu amaçlı rastgele değişkenlerden herbirinin serbestlik derecesi değiştikçe sergileyecekleri grafikler de benzer oranda değişik geometrik şekiller sergileyecektir.



Şekil 23 : F-Dağılım eğrisi

Burada özetle tekrar söylemek gerekirse; (6-106b) rastgele değişkenine ilişkin dağılım fonksiyonun sergilediği eğriler, f_1 payın ve f_2 paydanın serbestlik derecelerine göre farklı geometrik şekiller göstermektedir. Bu durumun bir görsel kanıtı olarak, üç farklı serbestlik derecesine göre Şekil 23'de verilmiş olan eğriler ailesi gösterilebilir.

- $f_1 = 6, \quad f_2 = 30$ *serbestlik derecelerine **siyah** renkte,*
- $f_1 = 12, \quad f_2 = 10$ *serbestlik derecelerine **mavi** renkte,*
- $f_1 = 12, \quad f_2 = 50$ *serbestlik derecelerine **kırmızı** renkte,*

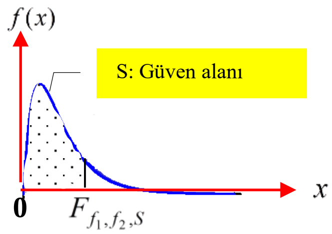
Sonuçta bu eğriler incelendiklerinde; bunlardan her biri χ^2 dağılımına benzer eğriler şeklinde bir görünüm sergilediği hemen fark edilebilir.

6.4.3. *F-Fisher* Dağılımıyla İlgili Hesaplamalar

F-Fisher dağılımı ile ilgili problemlerin çözümünde veya hipotez testlerinden ilgili olanlarının istatistik olarak irdelenmesinde, önceden farklı yanılma ya da güven olasılıklarına göre hazırlanmış *F-Fisher* dağılım tablo değerlerinden faydalanılır. Burada, genel bir bilgi edinmek amacıyla, bu tablolardan farklı şekillerde hazırlanmış birkaç örnek tablo biçimi *Tablo 8, Tablo 9, Tablo 10*'da verilmiştir. Bunların arasındaki en belirgin fark, bazılarında doğrudan *F*-Fisher dağılım değerleri verilmişken, bazılarında bu bilgiler yanında χ^2*-dağılımı* ve *t-dağılımı* tablo değerlerinin de verilmiş olmasıdır. Bu amaçla hazırlanmış her bir *F-Fisher* dağılım tablosunda ilgili olası argümanlar; $P_r = S = 1-\alpha$ *(S: güven veya* $\alpha = 1-S$ *: yanılma olasılığı)* olasılık değeri ile F_S apsis ve f_1 , f_2 dağılımın serbestlik derecesi değerleri olmaktadır. Farklı $P_r = S = 1-\alpha$ *(S: güven,* α *: yanılma olasılığı)* olasılık değerine göre düzenlenmiş her bir tablonun ilk satır ve sütunundan dağılımın f_1 , f_2 serbestlik dereceleri, arda kalan satır ya da sütunlardan da öngörülen olasılık değerine karşılık gelen F_S apsis ya da tablo sınır *(kritik)* değerleri yer almaktadır (*Tablo 8, Tablo 9, Tablo 10 ve Ek.4, Ek.5, Ek.6 da verilmiş olan farklı şekillerdeki F-Fisher, t-Student ve* χ^2*-dağılımı tablo örnekleri)*. Ayrıca, bu tablolar arasında karşılaşılan bir diğer farklılık da; bazılarının $P_r = S = 1-\alpha$ güven alanı olasılığı *(anlamlılık seviyesi)* değerlerine göre hazırlanmış olmalarına rağmen bazılarının sadece $\alpha = 1-S$ yanılma olasılığına göre düzenlenmiş olmalarıdır. Kullanım açısından her bir tablo düzeni arasında önemli bir fark bulunmamaktadır.

Tablo 8: Tek Yönlü F-Fisher Dağılım Tablosuna Bir Örnek

Tek yönlü F-Dağılımının Dağılım Fonksiyonu



Bu tablo düzeninde;

Üst tarafından $\alpha = 0{,}05$

Alt tarafından $\alpha = 0{,}01$ yanılma olasılıklarına karşılık gelen değerler alınır.

f_2 \ f_1	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**	**12**	**15**	**20**	**50**	**100**	**∞**	f_1 / f_2
3	9,3	9,1	9,0	8,9	8,8	8,7	8,7	8,7	8,6	8,6	8,6	8,5	3
	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,2	27,1	26,9	26,7	26,4	26,2	26,1	
4	6,6	6,4	6,3	6,2	6,0	6,0	5,9	5,9	5,8	5,7	5,7	5,6	4
	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,5	14,4	14,2	14,0	13,7	13,6	13,5	
5	5,4	5,2	5,0	5,0	4,8	4,7	4,7	4,6	4,6	4,4	4,4	4,4	5
	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	10,1	9,9	9,7	9,6	9,2	9,1	9,0	
6	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,9	3,8	3,7	3,7	6
	9,8	9,2	8,9	8,5	8,1	7,9	7,7	7,6	7,4	7,1	7,0	6,9	
8	4,1	3,8	3,7	3,6	3,4	3,4	3,3	3,2	3,2	3,0	3,0	2,9	8
	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,8	5,7	5,5	5,4	5,1	5,0	4,9	
10	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,8	2,6	2,6	2,5	10
	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,8	4,7	4,6	4,4	4,1	4,0	3,9	
12	3,5	3,3	3,1	3,0	2,8	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	12
	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,3	4,2	4,0	3,9	3,6	3,5	3,4	
15	3,3	3,1	2,9	2,8	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	15
	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,8	3,7	3,5	3,4	3,1	3,0	2,9	
20	3,1	2,9	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	20
	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	2,6	2,5	2,4	
100	2,7	2,5	2,3	2,2	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,5	1,4	1,3	100
	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,5	2,4	2,2	2,1	1,7	1,6	1,4	
∞	2,6	2,4	2,2	2,1	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,4	1,2	1,0	∞
	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,3	2,2	2,0	1,9	1,5	1,4	1,0	
f_2 \ f_1	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**	**12**	**15**	**20**	**50**	**100**	**∞**	f_1 / f_2

Tablo 9: S=%95 için t, χ^2 ve *F-Fisher Dağılım Tablosu*

S = %95 α = %5 için t - χ^2 - ve F - Dağılımları

f	t Tek Yön	t İki Yön	χ^2	F - Dağılımı Üst Sınırları f_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	50	100	200	∞	f_2
1	6,31	12,71	3,84	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	252	253	254	254	1
2	2,92	4,30	5,99	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,39	19,40	19,41	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,49	19,49	19,50	2
3	2,35	3,18	7,81	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,58	8,55	8,54	8,53	3
4	2,13	2,78	9,49	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,70	5,66	5,65	5,63	4
5	2,02	2,57	11,07	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,44	4,41	4,38	4,37	5
6	1,94	2,45	12,59	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,75	3,71	3,69	3,67	6
7	1,89	2,36	14,07	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,32	3,27	3,25	3,23	7
8	1,86	2,31	15,51	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,02	2,97	2,96	2,93	8
9	1,83	2,26	16,92	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,93	2,90	2,86	2,80	2,76	2,73	2,71	9
10	1,81	2,23	18,31	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,64	2,59	2,56	2,54	0
11	1,80	2,20	19,68	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,51	2,46	2,42	2,40	11
12	1,78	2,18	21,03	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,50	2,47	2,40	2,35	2,32	2,30	12
13	1,77	2,16	22,36	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,31	2,26	2,24	2,21	13
14	1,76	2,14	23,68	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,24	2,19	2,16	2,13	14
15	1,75	2,13	25,00	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,18	2,12	2,10	2,07	15
16	1,75	2,12	26,30	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,12	2,07	2,04	2,01	16
17	1,74	2,11	27,59	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,08	2,02	1,99	1,96	17
18	1,73	2,10	28,87	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,04	1,98	1,95	1,92	18
19	1,73	2,09	30,14	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,15	2,11	2,07	2,00	1,94	1,91	1,88	19
20	1,72	2,09	31,41	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,97	1,91	1,87	1,84	20
21	1,72	2,08	32,67	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,09	2,05	2,01	1,94	1,88	1,84	1,81	21
22	1,72	2,07	33,92	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,91	1,85	1,81	1,78	22
23	1,71	2,07	35,17	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,04	2,00	1,96	1,88	1,82	1,79	1,76	23
24	1,71	2,06	36,42	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,02	1,98	1,94	1,86	1,80	1,76	1,73	24
25	1,71	2,06	37,65	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,00	1,96	1,92	1,84	1,78	1,74	1,71	25
26	1,71	2,06	38,89	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,82	1,76	1,72	1,69	26
27	1,70	2,03	40,11	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,81	1,74	1,71	1,67	27
28	1,70	2,05	41,34	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,79	1,73	1,69	1,65	28
29	1,70	2,05	42,56	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,77	1,71	1,68	1,64	29
30	1,70	2,04	43,77	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,76	1,70	1,66	1,62	30
34	1,69	2,03	48,60	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,05	1,97	1,89	1,84	1,80	1,71	1,65	1,61	1,57	34
40	1,68	2,02	55,76	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,66	1,59	1,55	1,51	40
44	1,68	2,02	60,48	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	1,98	1,90	1,81	1,76	1,72	1,63	1,56	1,52	1,48	44
50	1,68	2,01	67,50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95	1,87	1,78	1,74	1,69	1,60	1,52	1,48	1,44	50
60	1,67	2,00	79,08	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,56	1,48	1,44	1,39	60
70	1,67	1,99	90,53	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,89	1,81	1,72	1,67	1,62	1,53	1,45	1,40	1,35	70
80	1,66	1,99	101,88	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,88	1,79	1,70	1,65	1,60	1,51	1,43	1,38	1,32	80
90	1,66	1,99	113,15	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,86	1,78	1,69	1,64	1,59	1,49	1,41	1,36	1,30	90
100	1,66	1,98	124,34	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85	1,77	1,68	1,63	1,57	1,48	1,39	1,34	1,28	100
150	1,66	1,98	179,58	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,82	1,73	1,64	1,59	1,53	1,44	1,34	1,29	1,22	150
200	1,65	1,97	233,99	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,80	1,72	1,62	1,57	1,52	1,41	1,32	1,26	1,19	200
∞	1,65	1,96	∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,35	1,24	1,17	1,00	∞

Tablo 10: S=%97,5 *İçin F-Fisher Dağılım Tablosu*

S = %97,5, α = 0,025 için Tek Yönlü F-FISHER-Dağılımının Dağılım Fonksiyonu

f_1 : Payın serbestlik derecesi, f_2 : Paydanın serbestlik derecesi

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	993,1	997,2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,62	6,43	6,33	6,28	5,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,26	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	2,97
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95	1,88
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,81
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

Uygulamalarda, bu tabloların herhangi biri kullanılarak; direkt problem çözümlerinde *F-dağılım* tablolarına; F_S apsis ve f_1 , f_2 serbestlik dereceleri değerleri ile girilerek $P_r = S = 1-\alpha$ olasılık değeri *(anlamlılık seviyesi)* belirlenir. Benzer şekilde invers problemler için de bu olasılık tablolarına; $P_r = S = 1-\alpha$ olasılık ve f_1 , f_2 serbestlik derecesi değerleri ile girilerek F_S apsis değeri elde edilir.

Burada genel durumuyla konunun kısa bir özeti yapılmak istenirse; bu tür tabloların kullanılması; $x \rightarrow F(f_1, f_2)$ *F-Fisher* dağılımına sahip bir rastgele değişken olmak üzere, P_r , f_1 , f_2 ve F_S arasındaki,

$$P_r(x \le F_S) = \int_0^{F_S} f(f)\ df$$

analitik integral alma ilişkisine dayanmaktadır. Bu ilişkinin detaylı bir biçimde incelenmesinden, integral bağıntısının sağ tarafındaki ifade daha önce (6-106a) da verilmiş olan F-dağılımıyla ilgili olasılık fonksiyonudur. Bir istatistik probleminin çözümünde her seferinde böyle bir integral işleminin alınması oldukça zor ve karmaşık işlemler gerektireceğinden pek pratik bir çözüm olmamaktadır. Uygulamada daha pratik bir yol, F-dağılımı ile ilgili bu gibi integrallerin her seferinde alınması yerine standart duruma göre farklı olasılık değerleri için daha önceden hazırlanmış standart rastgele değişkenli *F-Fisher* ya da *F-istatistik dağılım* tablolarının kullanılmasıdır. Pratikte, bu amaçlı daha önceden hazırlanmış bu gibi dağılım tablolarının herhangi birinin kullanılması, daha önceki konularda çeşitli yönleri ile ele alınıp açıklanmış olan diğer dağılım tablolarına benzer şekilde burada da P_r olasılık ve f_1, f_2 serbestlik derecesi argümanları esas alınarak bütün işlemler gerçekleştirilir. Ayrıca, konunun daha pratik ve anlaşılır olması bakımından daha önce kuramsal anlamda yapılmış açıklamalarla ilgili bazı örnek problem çözümleri aşağıda verilmiştir.

Örnek 1: $x \to F(5\ ,\ 10)$ yani; serbestlik dereceleri $f_1 = 5$, $f_2 = 10$ olan bir x rastgele değişkenin $P_r(x \le 3{,}33) = ?$ olasılık değeri ne kadar olmaktadır?

Çözüm 1: Böyle bir $P_r(x \le 3{,}33) = ?$ olasılık sonucunun ne olduğunu hesaplayabilmek için ilgili F-dağılım tablolarından $f_1 = 5$, $f_2 = 10$ için $F_{5,10,0.95} = 3{,}33$ ve neticede üst taraftan $P_r(x \le 3{,}33) = 0{,}95$ ve alt taraftan da $P_r(x \le 3{,}33) = 0{,}99$ olarak bulunur (Tablo 8).

Sonuç: $P_r(x \le 3{,}33) = 0{,}95$ veya $P_r(x \le 3{,}33) = 0{,}99$ olarak elde edilir.

Örnek 2: $x \to F(4\ ,\ 8)$ yanı $f_1 = 4$, $f_2 = 8$ olan bir x rastgele değişkeni $P_r(x \le F_S) = 0{,}95$ olması için $F_S = ?$ ne kadar olması gerekir?

Çözüm 2: Daha önceki problemlerin çözümünde yapılan işlemlere benzer şekilde hareket edilerek, ilgili F-dağılım tablosundan $f_1 = 4$, $f_2 = 8$ ve S=0,95 olasılıkla $F_{4,8,0,95}(4\ ,\ 8) = 3{,}84$ bulunur (Tablo 8).

Sonuç: S=0,95 olasılığa karşılık gelen sınır değeri $F_S = 3{,}84$ olur.

Örnek 3: $x \to F(4\ ,\ 8)$ yanı $f_1 = 4$, $f_2 = 8$ olan bir x rastgele değişkenin $P_r(x \le F_S) = 0{,}05$ olması için $F_S = ?$ ne kadar olması gerekir?

Çözüm 3: Tablo 8'deki bilgileri kullanarak böyle bir problemin çözümü için sırası ile aşağıdaki işlemler yapılır. Böyle bir işlem için Tablo 8'den $P_r(x \le F_S) = S = 1 - \alpha = 0{,}05$ anlamlılık seviyesine karşılık gelen değerler bulunmadığından $P_r(x \le F_S) = 0{,}05$ anlamlılık seviyesine göre problemin Tablo 8 de verilen değerlerden hesabı için,

$$P_r(x \le F_S) = P_r(\frac{1}{x} \ge \frac{1}{F_S}) = 1 - P_r(\frac{1}{x} \ge \frac{1}{F_S}) = 0{,}05$$

bağıntısı yazılarak yapılan işlemler neticesinde,

$$P_r(\frac{1}{x} \le \frac{1}{F_S}) = 0{,}95$$

olasılık bağıntısı elde edilir. Böyle bir olasılık bağıntısında; $x \to F(4\ ,8)$ için sınır değeri $F_S = F_{4,\ 8,\ 0{,}05}$ olduğu hatırlanırsa, $\frac{1}{x} \to F(8\ ,\ 4)$ için de $P_r(\frac{1}{x} \le F_{8,\,4,\,0{,}95}) = 0{,}95$ olur. Bu durumda; ilgili F-dağılım tablosundan $F_{8,\,4,\,0{,}95} = 6{,}04$ alınarak $\frac{1}{x}$ için

$$F_S = \frac{1}{F_{8,\,4,\,0{,}95}} = \frac{1}{6{,}04} = 0{,}166$$

sınır değeri bulunmuş olur.

Sonuç: Sınır değeri $F_S = 0{,}166$ olur.

Örnek 4: $x \to F(5\ ,\ 10)$ yanı $f_1 = 5$, $f_2 = 10$ olan bir x rastgele değişkenin $P_r(F_{S_1} \le x \le F_{S_2}) = 0{,}90$ olması için $F_{S_1} = ?$ ve $F_{S_2} = ?$ sınır değerleri ne kadar olmalıdır?

Çözüm 4: Böyle bir problemin çözümü için $P_r(F_{S_1} \le x \le F_{S_2})$ olasılık bağıntısı iki olasılık bağıntısının tanımladığı alanların farkı biçiminde

$$P_r(F_{S_1} \le x \le F_{S_2}) = P_r(x \le F_{S_2}) - P_r(x \le F_{S_1})$$

olarak yazılır. Burada; çözüm için bir ön yaklaşım olarak, güven alanının her iki taraftaki sınır değerleri $F_{s_1} = ?$ ve $F_{s_2} = ?$ öyle seçilmelidir ki, geriye kalan olasılık yanı yanılma olasılığı $\alpha = 1 - S =$ *1-0,90=0,10* değeri iki eşit parçadan oluşmuş olsun. Bu durumda her iki tarafa ilişkin sınır değerleri;

a) $P_r(x \le F_{S_2}) = 0{,}95$ burada $F_{S_2} = F_{5,10,0{,}95}$

b) $P_r(x \le F_{S_1}) = 0{,}05$ burada $F_{S_1} = F_{5,10,\ 0{,}05}$

olur.

a) $P_r(x \le F_{S_2}) = 0{,}95$ için $F_{S_2} = F_{5,10,0{,}95}$ biçiminde tanımlanmış sınır değeri; ilgili *F*-dağılım tablosundan $f_1 = 5$, $f_2 = 10$ pay ve paydanın serbestlik dereceleri ve *S= 0.95* güven için doğrudan $F_{5,10,0{,}95} = 3{,}33$ olarak hesaplanır (Tablo 8).

b) $P_r(x \le F_{S_1}) = 0{,}05$ için de $F_{S_1} = F_{5,10,\ 0{,}05}$ sınır değeri örnek 3 deki problem çözümüne benzer çözüm yolları izlenerek önce;

$$P_r(x \le F_{S_1}) = P_r(\frac{1}{x} \ge \frac{1}{F_{S_1}}) = 1 - P_r(\frac{1}{x} \le \frac{1}{F_{S_1}}) = 0{,}05$$

ilişkisi yazılır. Daha sonra buradan,

$$P_r(\frac{1}{x} \le \frac{1}{F_{S_1}}) = 0{,}95$$

ve

$$P_r(\frac{1}{x} \le F_{10,5,0{,}95}) = 0{,}95$$

olduğunun göz önüne alınması ile, ilgili *F*-dağılım tablolarından;

$$F_{10,5,0{,}95} = 4{,}73$$

elde edilir. Bu değer kullanılarak

$$F_S(f_1, f_2) = \frac{1}{F_{1-p}(f_2, f_1)}$$

bağıntısına göre de Tablo 8 den doğrudan alınmış olan,

$$F_{10,5,0,95} = 4{,}73$$

sınır değerinden

$$P_r(x \le F_{S_1}) = 0{,}05$$

olasılığına ilişkin sınır değeri

$$F_{5,10,0,05} = \frac{1}{4{,}73} = 0{,}211$$

olarak bulunmuş olur.

Sonuç: Bu problemin çözümü olarak, $P_r(F_{S_1} \le x \le F_{S_2}) = 0{,}90$ olasılığına karşılık gelen alt ve üst sınır değerleri

$$F_{5,10,0,95} = 3{,}33 \quad \text{ve} \quad F_{5,10,\ 0,05} = 0{,}211$$

biçiminde elde edilmiş olur.

Örnek 5: Her biri standart dağımılı; $f_1 = 7$ serbestlik dereceli σ_1^2 ve $f_2 = 11$ serbestlik dereceli σ_2^2 varyans değerlerinden $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ koşuluna göre $x = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ biçiminde tanımlanan standart dağılımlı bir x rastgele değişkenin $P(x \le c) = 0{,}95$ olması için $c = ?$ sınır değeri kaç olur?

Çözüm 5: Böyle bir problemin çözülebilmesi için, x rastgele değişkeni her biri merkezi standart χ^2-kare dağılımında olan varyans değerlerinden $x = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ bağıntısına göre hesaplanmaktadır. Hatırlanacağı gibi, her biri χ^2-kare dağılımında olan iki rastgele değişkenin $x = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ oranı biçiminde hesaplanan bir diğer x rastgele değişkeni de benzer şekilde merkezi standart *F*-dağılımında olur. Burada, $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

koşulu dikkate alınmış olduğunda $x \geq 1$ büyük ve dolayısı ile kullanılacak standart F-tablosuda da aynı özellikte hazırlanmış bir standart dağılım tablosu olmalıdır. Bu amaçla, $P(x \leq c) = 0,95$ olasılığı için yanılma olasılığı $\alpha = 1 - S = 0,05$ olacağından, çift taraflı sınır için $\alpha/2 = 0,025$ alınarak Tablo 10 değerleri kullanılır. Tablo 10 'da $\alpha/2 = 0,025$ yanılma olasılıklı ve $f_1 = 7$, $f_2 = 11$ serbestlik derecesi değerlerine göre çift taraflı sınır $c = 3,76$ olarak elde edilir.

Sonuç: Bu problemin çözümü olarak, $P(x \leq c) = 0,95$ olasılığına karşılık gelen c sınır değeri

$$c = 3,76$$

olarak elde edilmiş olur.